V研客™
在线教育
www.vyanke.com

2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2021年1月

V研客™
在线教育
www.vyanke.com

第十一章

向量代数与空间解析几何及多元微分学在几何上的应用

第一节 向量代数

考试要求

1、理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示.

2、掌握向量的运算（线性运算、数量积、向量积、混合积），了解两个向量垂直、平行的条件.

3、理解单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式，掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.

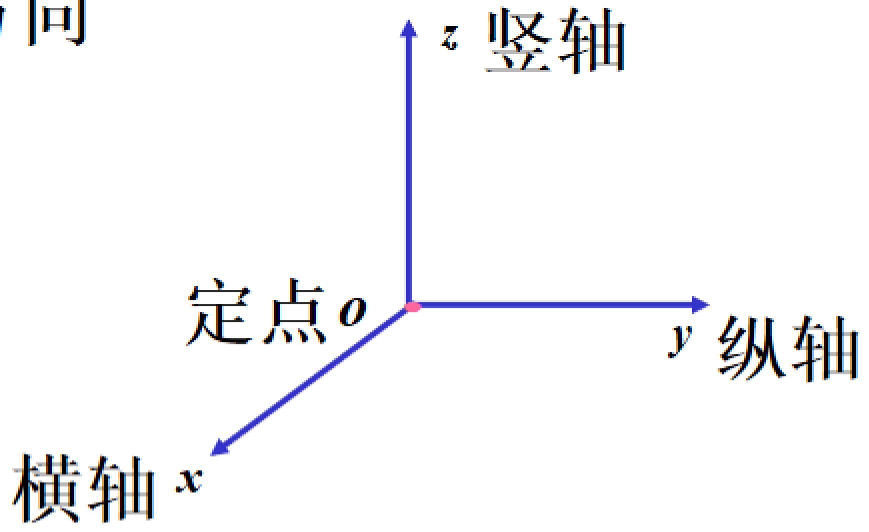
95年

考试内容概要

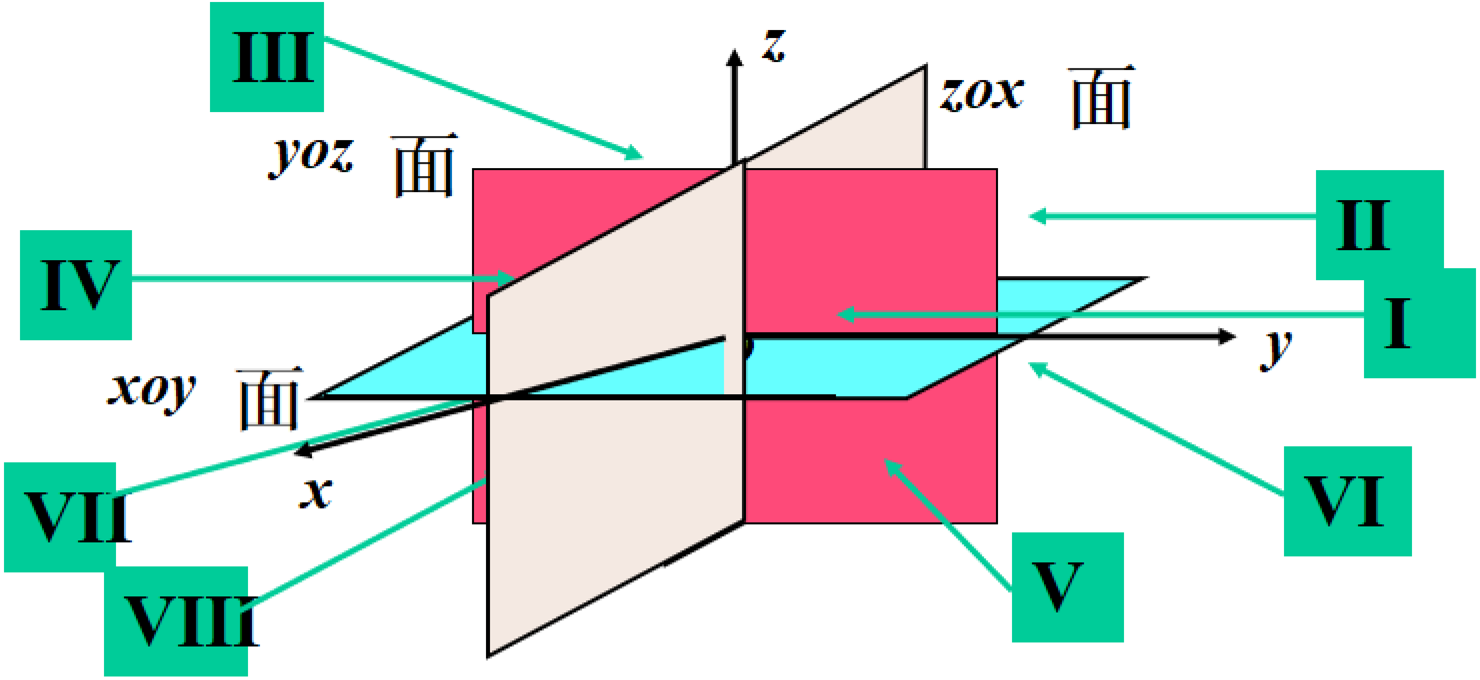
一、空间直角坐标系

三个坐标轴的正方向符合右手系.

即以右手握住z轴，当右手的四个手指从正向x轴以$\frac{\pi}{2}$角度转向正向y轴时，大拇指的指向就是z轴的正向.



空间直角坐标系



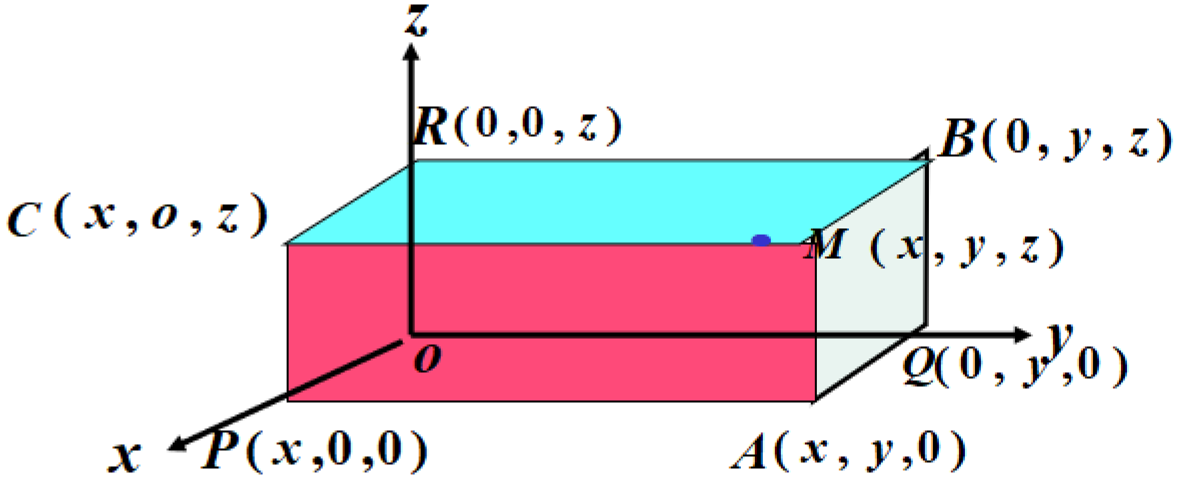
空间直角坐标系共有八个卦限

空间的点 $\xleftrightarrow{1--1}$ 有序数组(x, y, z)

特殊点的表示：$O(0,0,0)$

坐标轴上的点 P ,Q , R ,

坐标面上的点 A , B ,C ,

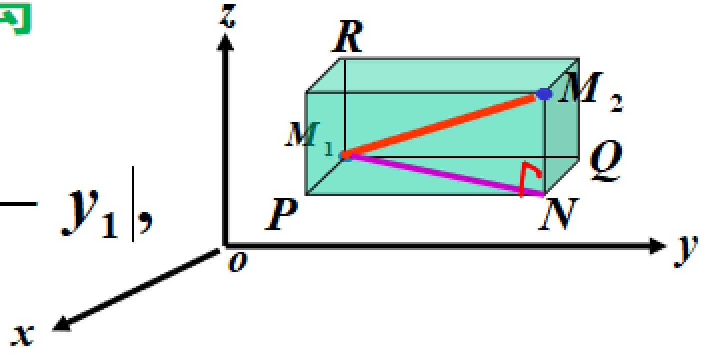


二、空间两点间的距离

$$d^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2,$$

$$\because |M_1P|=|x_2-x_1|,\ |PN|=|y_2-y_1|,$$

$$|NM_2|=|z_2-z_1|,$$



$$\therefore d=\sqrt{|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2}$$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

空间两点间距离公式

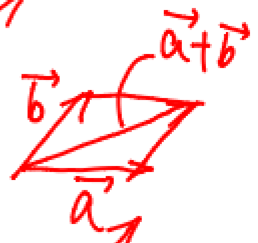
特殊地：若两点分别为 $M(x,y,z)$,$O(0,0,0)$

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

三、向量的概念

向量： 既有大小又有方向的量.

向量表示： $\boxed{\vec{a}}$ 或 $\overrightarrow{M_1M_2}$　a　$\vec{a}$



以 M_1 为起点，M_2 为终点的有向线段. M_1　M_2

$\vec{a}$　$\lambda\vec{a}$

向量的模： 向量的大小. $|\vec{a}|$ 或 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$

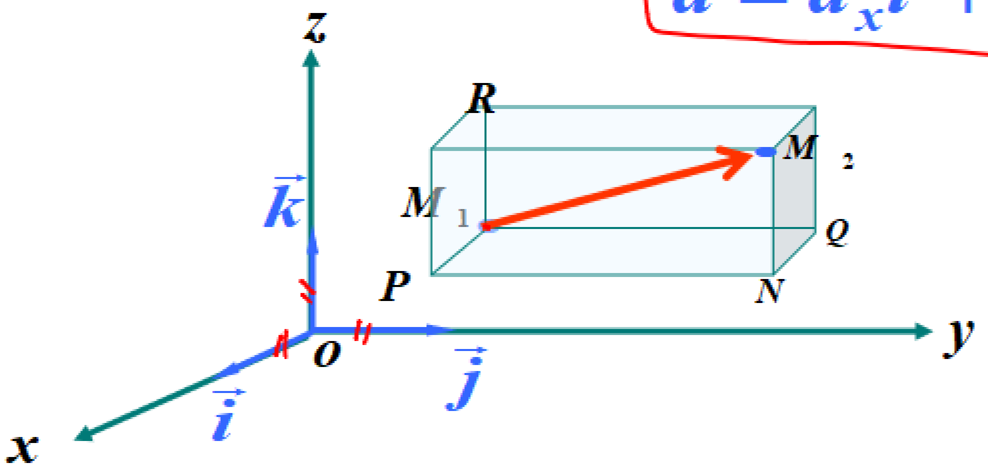
单位向量： 模长为1的向量.

$\vec{a}^0$表示与非零向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量，$\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

零向量： 模长为0的向量. $\vec{0}$

以$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$分别表示沿x,y,z轴正向的单位向量. $=\{a_x, a_y, a_z\}$

$$\boxed{\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}}$$



$$a_x=x_2-x_1$$

$$a_y=y_2-y_1$$

$$a_z=z_2-z_1$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$$

向量的加减法、向量与数的乘法运算的坐标表达式

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \qquad \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\},$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}$$

$$= (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k};$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \{a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z\}$$

$$= (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k};$$

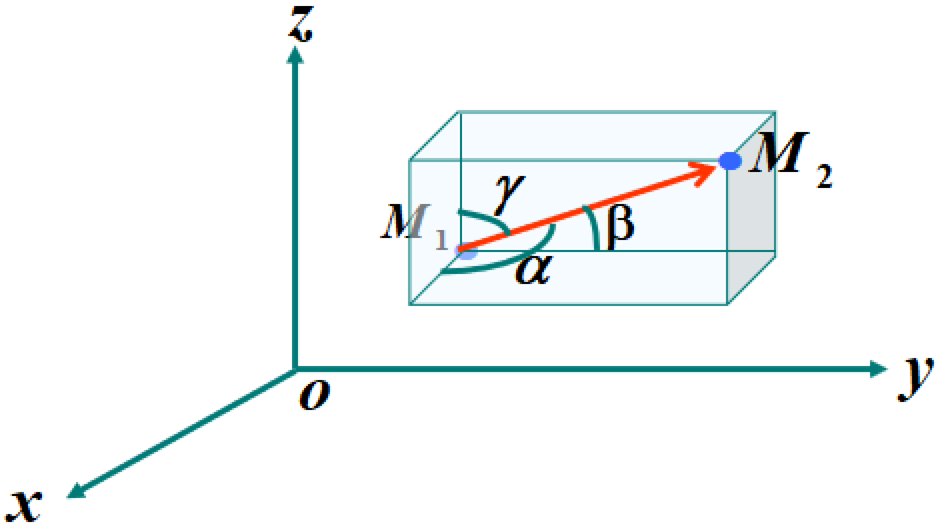
$$\lambda\vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$$

$$= (\lambda a_x)\vec{i} + (\lambda a_y)\vec{j} + (\lambda a_z)\vec{k}.$$

向量的模与方向余弦的坐标表示式

非零向量 $\vec{a}$ 的方向角：α、β、γ

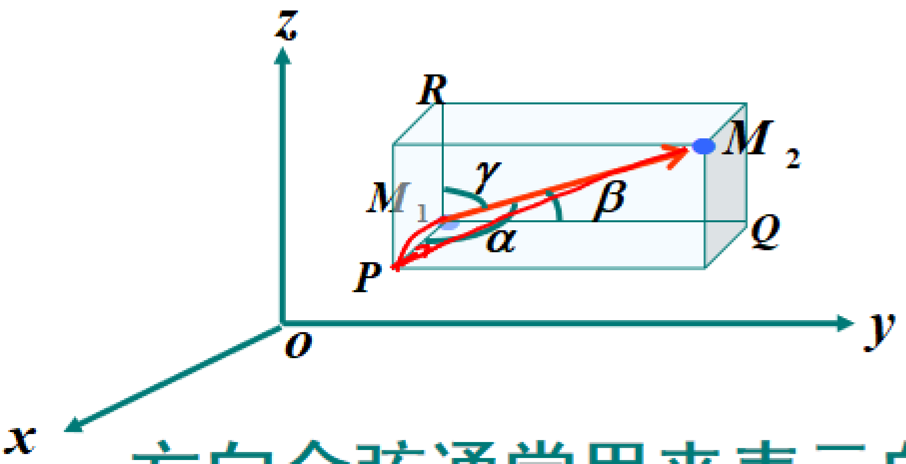
非零向量与三条坐标轴的正向的夹角称为方向角.



$$0 \le \alpha \le \pi,$$

$$0 \le \beta \le \pi,$$

$$0 \le \gamma \le \pi.$$



$$\begin{aligned} a_x &= |\vec{a}| \boxed{\cos\alpha} \\ a_y &= |\vec{a}| \boxed{\cos\beta} \\ a_z &= |\vec{a}| \boxed{\cos\gamma} \end{aligned}$$

向量的方向余弦

方向余弦通常用来表示向量的方向.

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{|M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

向量模长的坐标表示式

向量方向余弦的坐标表示式

当 $\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \neq 0$ 时，$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

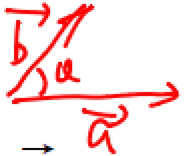
$$\vec{a}^{\,0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

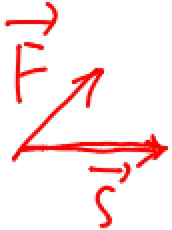
单位向量

四、向量的几种运算

1. 数量积

数





(1) 几何表示 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

(2) 代数表示 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}$

(3) 运算规律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$; 交换

分配律

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c};\ (\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b})=\lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

(4) 应用

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

$$\cos\theta=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

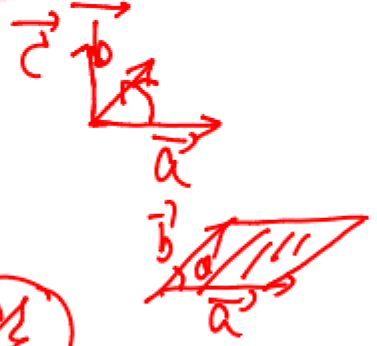
$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0$$

2. 向量积

(1) 几何表示 $\vec{c}=\boxed{\vec{a}\times\vec{b}}$ 叉 $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ 右手法则

(2) 代数表示

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



(3) 运算规律 $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$ S平

$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.\ (\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}).$

(4) 应用

1) 求同时垂直的向量　　2) 求平行四边形的面积 $S=|\vec{a}\times\vec{b}|$

3) 判断向量平行 $\vec{a}\,//\,\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}.$

3. 混合积

(1) 几何表示 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

(2) 代数表示

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

(3) 运算规律

1)轮换对称 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=[\vec{b}\vec{c}\vec{a}]=[\vec{c}\vec{a}\vec{b}]$

2)交换变号 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=-[\vec{b}\vec{a}\vec{c}]=-[\vec{a}\vec{c}\vec{b}]$

(4) 应用

1) 求平行六面体的体积 $V=\left|[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\right|$

2) 三个向量共面的充要条件 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=0$

常考题型与典型例题

V研客™
在线教育

例 1(1995-1) 已知$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$,则

$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=2$

$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=$ $2\times2=4$ ______.

分析: $=(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}+(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$

$+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$

$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=[\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}]$

第二节 空间直线与平面

考试要求

1、掌握平面方程和直线方程及其求法.

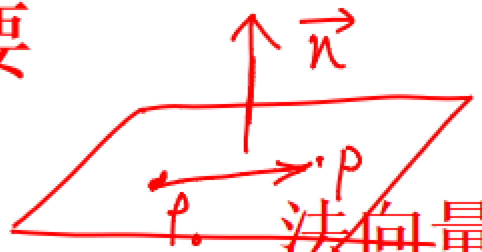
2、会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角，并会利用平面、直线的相互关系（平行、垂直、相交等））解决有关问题.

3、会求点到直线以及点到平面的距离.

87、90、91、93、95、96、06(点到平面的距离)

考试内容概要

一、平面的方程



法向量 $\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}=0$

1、平面的一般方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

$\vec{n}=\{A,B,C\}.$

$\overrightarrow{P_0P}=\{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\}$

2、平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz-\underbrace{\boxed{(Ax_0+By_0+Cz_0)}}_{=D}=0$$

3、平面的截距式方程

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

4、两个平面的位置关系

两平面夹角余弦公式

Π_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,

Π_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$,

$\vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$,

两平面位置特征: $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$

(1) $\Pi_1\perp\Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$;

$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$

(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1\times\vec{n}_2=0 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

平面一般方程的几种特殊情况：

(1) $D=0$, 平面通过坐标原点； $Ax+Dy+Cz+D=0$

(2) $A=0$, $\begin{cases} D=0, & \text{平面通过 } x \text{ 轴；} \\ D\neq 0, & \text{平面平行于 } x \text{ 轴；} \end{cases}$

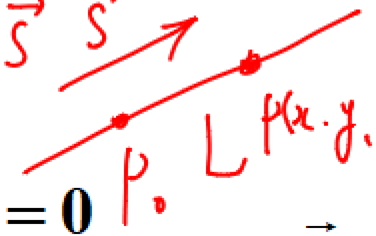
类似地可讨论 $B=0$, $C=0$ 情形.

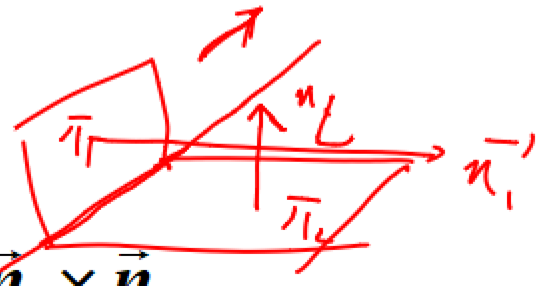
(3) $A=B=0$, 平面平行于 xoy 坐标面；

类似地可讨论 $A=C=0$, $B=C=0$ 情形.

二、直线的方程

$\overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{s}$





1、直线的一般方程

$$\begin{array}{l} \pi_1 \\ \pi_2 \end{array}\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2.$$

2、直线的对称式方程

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

方向向量 $\vec{s} = \{m, n, p\}$.

3、直线的参数式方程

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

4、两条直线的位置关系

$$L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

$$L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

两直线夹角余弦公式

$$\cos(\widehat{L_1,L_2})=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

$$\vec{s}_1=\{m_1,n_1,p_1\},$$

$$\vec{s}_2=\{m_2,n_2,p_2\},$$

两直线位置特征：

(1) $L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0,;$

(2) $L_1 /\!/ L_2 \quad \Leftrightarrow \vec{s}_1\times\vec{s}_2=0 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}.$

三、直线与平面的位置关系

$$L: \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

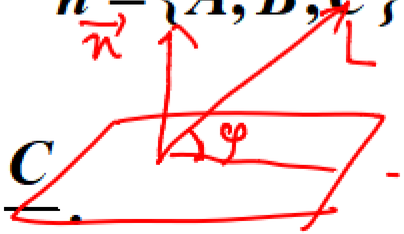
$$\Pi: \quad Ax+By+Cz+D=0,$$

直线与平面的夹角公式

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$$\vec{s}=\{m,n,p\},$$

$$\vec{n}=\{A,B,C\},$$



直线与平面的位置特征：

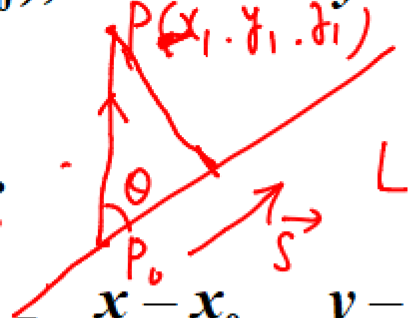
(1) $L\perp\Pi \Leftrightarrow \vec{s}\times\vec{n}=0 \Leftrightarrow \dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}.$

(2) $L\,//\,\Pi \Leftrightarrow \vec{s}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0.$

四、两个距离

1、点到平面的距离 $P(x_0, y_0, z_0), \Pi: Ax + By + Cz + D = 0,$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



2、点到直线的距离 $P(x_1, y_1, z_1), L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$

$|\vec{P_0P} \times \vec{s}| = |\vec{P_0P}| \times |\vec{s}| \sin\theta$

$$d = \frac{|\{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\} \times \{m, n, p\}|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

常考题型与典型例题

例 1(1987) 与两直线 L_1: $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$ 及

$\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{1}$ $\vec{s}_1=\{0,1,1\}$ $\{1,-1,1\}$ $\vec{n}$ $x-y+z=0$

L_2: $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行，且过原点的平面方程为____.

$$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=\{-1,1,-1\}$$

$-x+y-z=0$

V研客 在线教育

例 2(1990) 过点$M(1,2,-1)$且与直线$\begin{cases} x=-t+2, \\ y=3t-4, \\ z=t-1 \end{cases}$垂直的平面方程是________.

$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+1}{1}$

$x-3y-z+4=0$

分析. $\vec{n}=\{-1,3,1\}$

点法式 $-(x-1)+3(y-2)+(z+1)=0$

V研客 在线教育

例 3(1991) 已知两条直线的方程是

$$l_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1},\qquad l_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1},$$

则过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程是________. $x-3y+z+2=0$

分析

$$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}=\{1,-1,1\}$$

过点 $(1,2,3)$

$$Ax+By+Cz+D=0$$

$$x-1-3(y-2)+(z-3)=0$$

V研客 在线教育

例 4(1993) 设有直线 $l_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与

$l_2: \begin{cases} x-y=6, \\ 2y+z=3, \end{cases}$ 则 l_1 与 l_2 的夹角为

答案：C

(A) $\dfrac{\pi}{6}$. (B) $\dfrac{\pi}{4}$. (C) $\dfrac{\pi}{3}$. (D) $\dfrac{\pi}{2}$.

分析：$\vec{s}_1=\{1,-2,1\}$ $\vec{s}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}=\{-1,-1,2\}$

$\cos\theta=\dfrac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\dfrac{1}{2}$

例 5(1995) 设有直线 L：$\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 及平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$，则直线 L

答案：C

(A) 平行于 π.　　(B) 在 π 上.

(C) 垂直于 π.　　(D) 与 π 斜交.

分析：L的方向向量 $\vec{s}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -10 \end{vmatrix} = -28\vec{i}+14\vec{j}-7\vec{k} = -7\underline{\{4,-2,1\}}$

平面法向量 $\vec{n} = \underline{\{4,-2,1\}}$

例 6(1996) 设一平面经过原点及点(6,-3,2),且与平面

$\vec{n}_1=\{4,-1,2\}$

$4x-y+2z=8$ 垂直,则此平面方程为______. $2x+2y-3z=0$

分析: $\vec{n}\perp\{4,-1,2\}$ $\quad\vec{n}\perp\{6,-3,2\}$

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&-1&2\\6&-3&2\end{vmatrix}=\{2,2,-3\}$$

例 7(2006) 点 $(2,1,0)$ 到平面 $\underset{A}{3}x+\underset{B}{4}y+\underset{C}{5}z=0$ 的距离 $d=\underline{\sqrt{2}}$

$$d=\frac{|3\times2+4\times1+5\times0|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\sqrt{2}$$

第三节 曲面与空间曲线

考试要求

1、了解曲面方程和空间曲线方程的概念.

2、了解常用二次曲面的方程及其图形，会求简单的柱面和旋转曲面的方程.

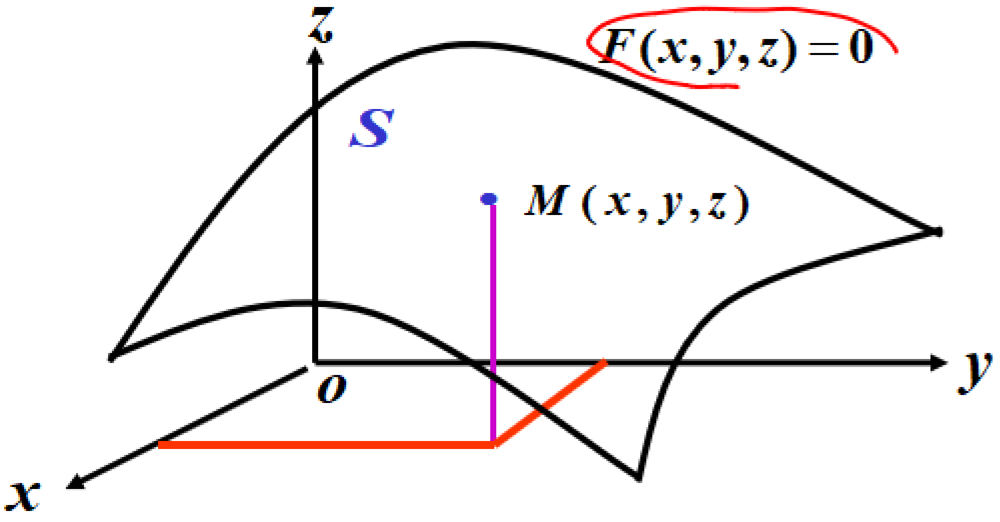
3、了解空间曲线的参数方程和一般方程. 了解空间曲线在坐标平面上的投影，并会求该投影曲线的方程.

考试内容概要

一、曲面方程

如果曲面S与三元方程$F(x,y,z)=0$有下述关系：

(1) 曲面S上任一点的坐标都满足方程；



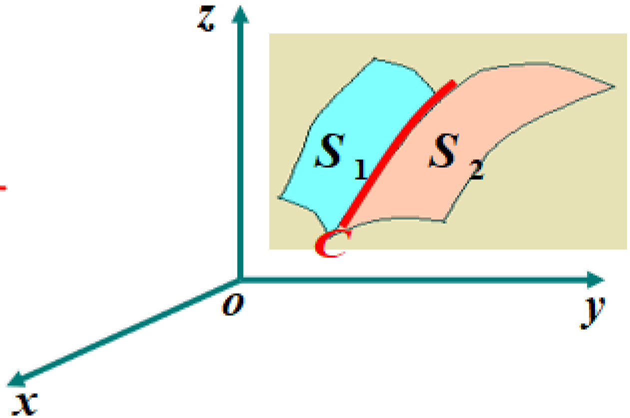
(2) 不在曲面S上的点的坐标都不满足方程；

那么，方程$F(x,y,z)=0$就叫做曲面S 的方程，而曲面S就叫做方程$F(x,y,z)=0$的图形．

二、空间曲线

1、空间曲线C可看作空间两曲面的交线.

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



空间曲线的一般方程

2、空间曲线C的参数方程

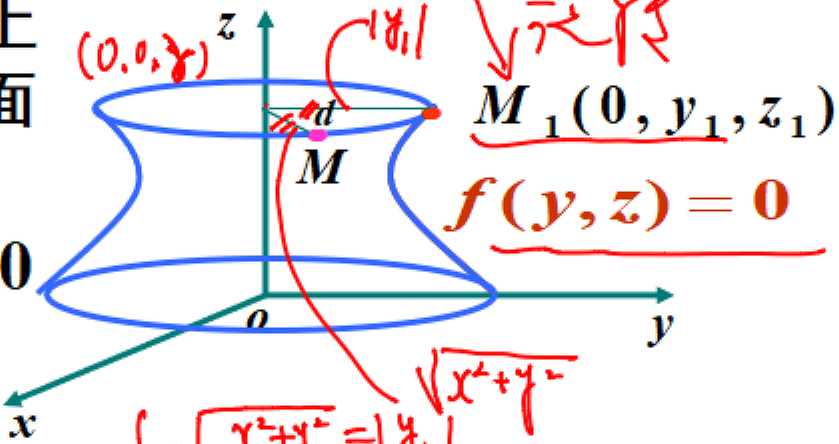
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

当给定$t = t_1$时，就得到曲线上的一个点(x_1, y_1, z_1)，随着参数的变化可得到曲线上的全部点.

三、常见曲面

1、旋转面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.



yoz坐标面上的已知曲线$f(y,z)=0$绕z轴旋转一周的旋转曲面方程.

$$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z\right)=0,$$

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|\\ z=z_1\\ f(y_1,z_1)=0\end{cases}$$

yoz坐标面上的已知曲线$f(y,z)=0$绕y轴旋转一周的旋转曲面方程.

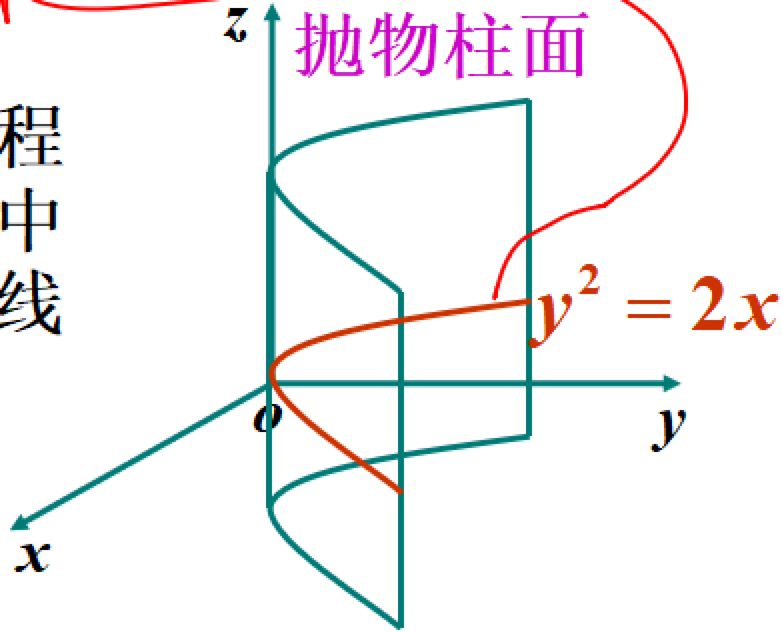
$$f\left(y,\ \pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0.$$

2、柱面

平行于定直线并沿定曲线C移动的直线L所形成的曲面称为柱面.

这条定曲线C叫柱面的准线，动直线L叫柱面的母线.

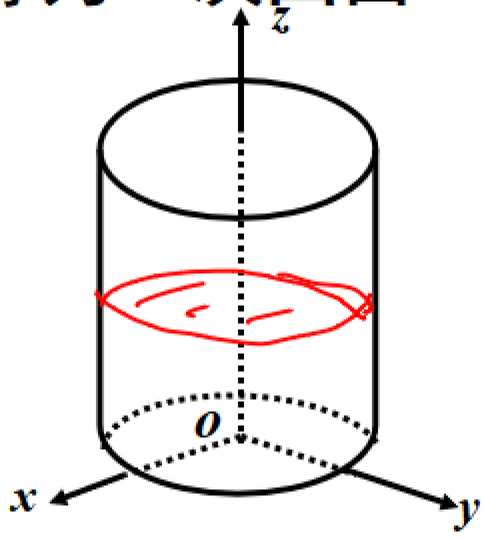
只含x, y而缺z的方程$F(x,y)=0$，在空间直角坐标系中表示母线平行于z轴的柱面，其准线为xoy面上曲线C.



3、 二次曲面

定义： 三元二次方程所表示的曲面称为二次曲面. 相应地平面被称为**一次曲面**.

(1)圆柱面： $x^2+y^2=R^2$



1)圆柱面与 xoy 面的交线为圆：

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$$

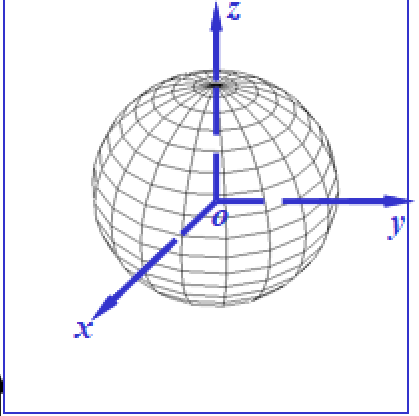
与平面 $z=c$ 的交线为中心在 z 轴上的圆.

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=c \end{cases}$$

2)与 xoz、yoz 面的交线为两平行直线 .

与平面 $y=c$、$x=c(|c|<R)$ 的交线两平行直线.

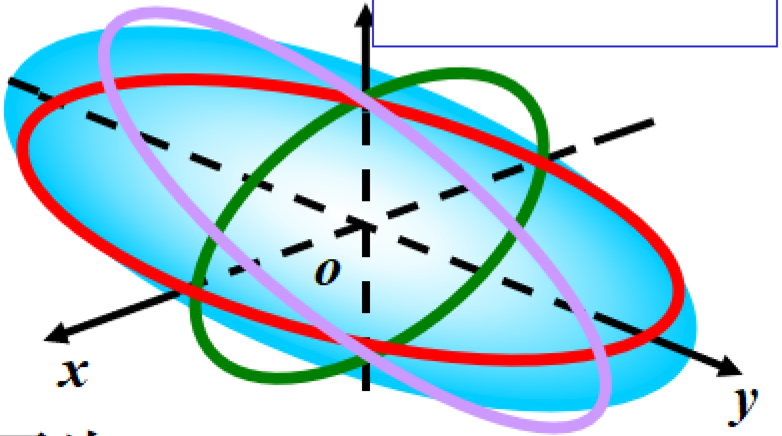
(2) 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



1)椭球面与三个坐标面的交线:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.\\ x=0\end{cases}$$



2) $a=b=c$, 方程可写为

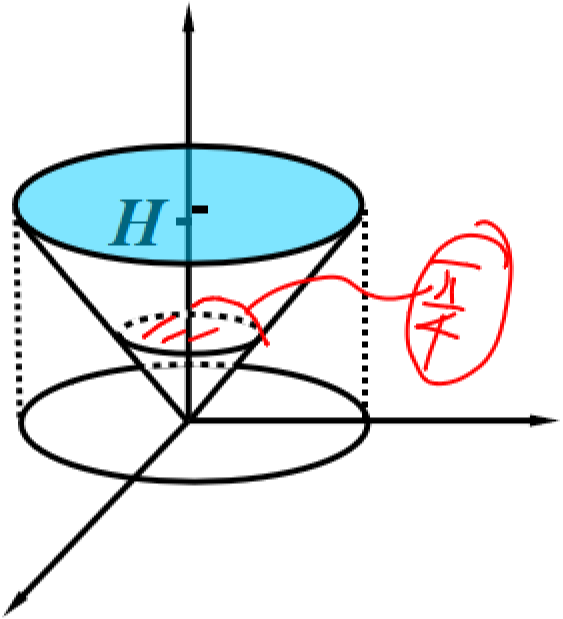
$x^2+y^2+z^2=a^2.$ 球面

(3) 椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$

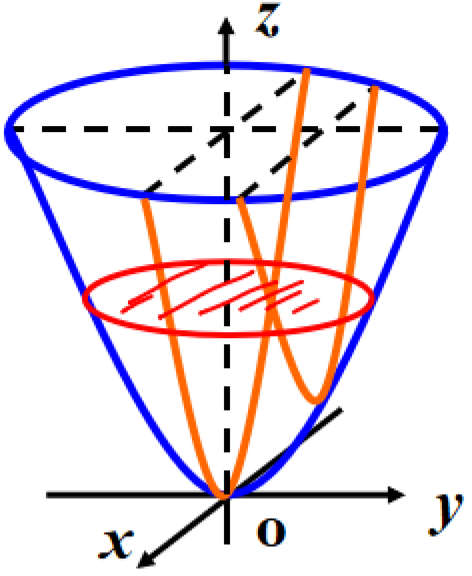
$a=b$, 圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=z^2$

特别地 $x^2+y^2=z^2$



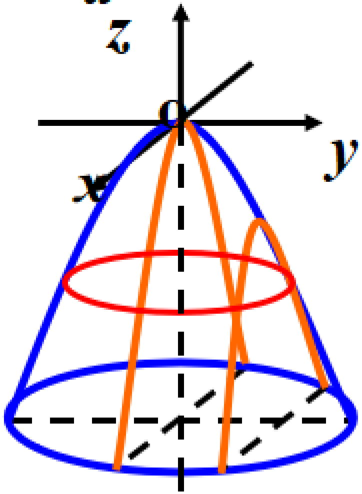
(4) 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$



$a=b$, 旋转抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=z$

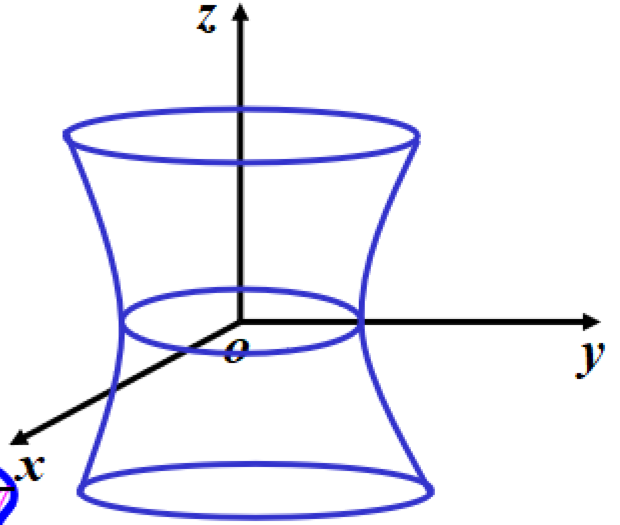
特别地 $x^2+y^2=z$



旋转抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=-z$

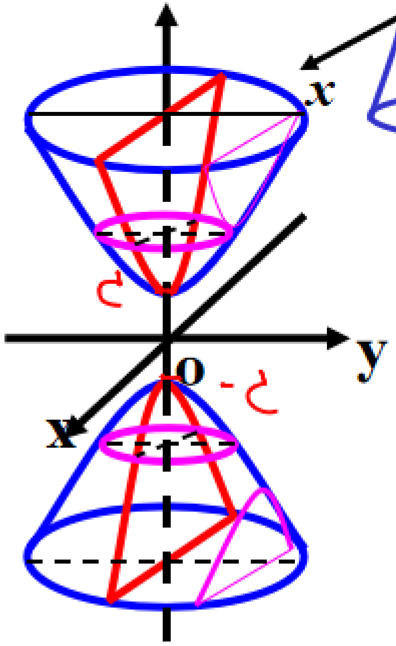
(5) 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



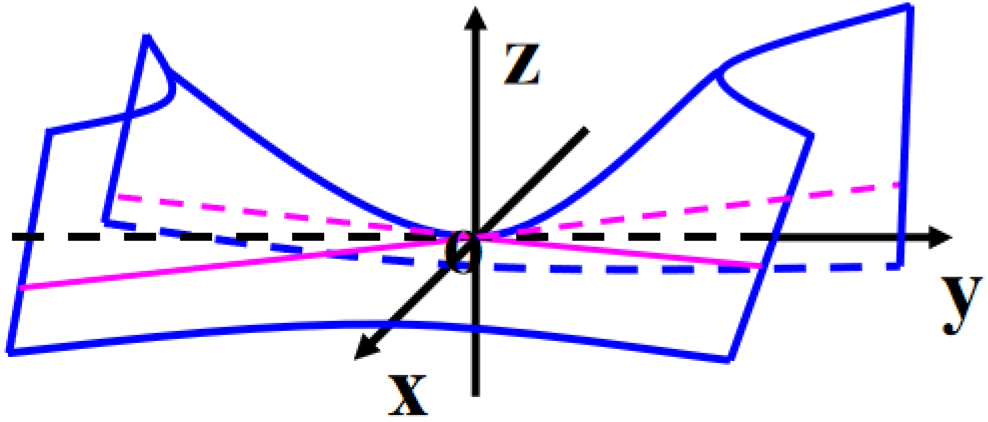
(6) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



(7) 双曲抛物面（马鞍面）

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$



四、空间曲线的投影

设空间曲线的一般方程：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

消去变量z后得：$H(x,y)=0$

曲线关于xoy面的投影柱面

空间曲线在xoy面上的投影曲线

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

类似地：可定义空间曲线在其他坐标面上的投影

常考题型与典型例题

例 1、 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+2z^2=1 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面方程.

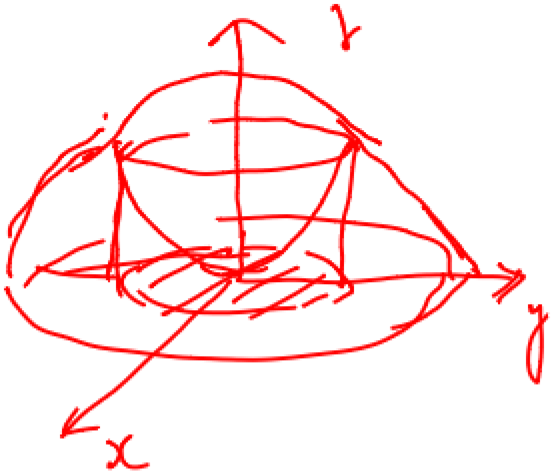
$$x^2+y^2=\frac{1}{2}$$

消去 z

分析. 1° $x^2+y^2+2(x^2+y^2)^2=1$

$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2} \\ z=0 \end{cases}$　　$x^2+y^2=-1$（舍去）

2° $2z^2+z=1 \Rightarrow z=\frac{1}{2}$ 或 $z=-1$（舍去）



例 2 求下列曲线为绕指定的轴旋转产生的旋转面的方程.

$\pm\sqrt{x^2+z^2}$

(1) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转;

$\pm\sqrt{y^2+z^2}$

y0z

$$2x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad 2(x^2 + z^2) + y^2 = 1$$

(2) $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 分别绕 y 轴和 z 轴旋转.

$$x^2 + z^2 = y^4 \qquad z = x^2 + y^2$$

$\pm\sqrt{x^2+z^2} = y^2$

V研客™ 在线教育

例 3、 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 (a>0) \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$在 xoy 面和 xoz 面上的投影曲线方程.

$\begin{cases} x^2+y^2=ax \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} z^2+ax=a^2 \\ y=0 \end{cases}$

1° xoy面 消去z

2° xoz面 消去y

V研客™
在线教育
www.vyanke.com

第四节 多元微分学在几何上的应用

V研客
在线教育

考试要求

了解空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念，会求它们的方程.

考试内容概要

一、曲面的切平面与法线

设曲面$\Sigma: F(x,y,z)=0$，Σ在点(x_0,y_0,z_0)处的法向量为：$\{F'_x, F'_y, F'_z\}$，

切平面方程：$F'_x(x-x_0)+F'_y(y-y_0)+F'_z(z-z_0)=0$

$F(x,y,z) = f(x,y)-z$

法线方程：$$\frac{x-x_0}{F'_x}=\frac{y-y_0}{F'_y}=\frac{z-z_0}{F'_z}$$

$\{-f_x, -f_y, 1\}$

特别的，设$\Sigma: z=f(x,y)$，Σ在点(x_0,y_0,z_0)处的法向量为：$\{f'_x, f'_y, -1\}$，

切平面方程：$f'_x(x-x_0)+f'_y(y-y_0)-(z-z_0)=0$

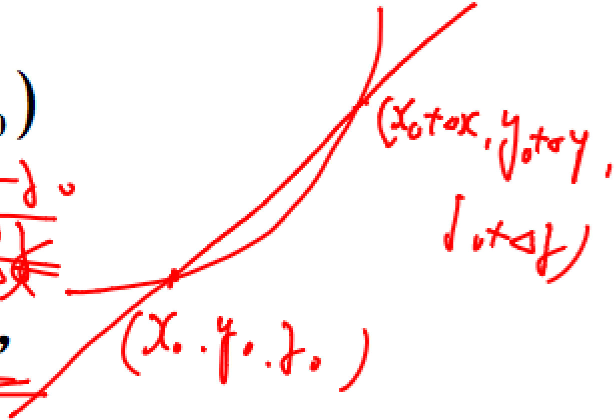
法线方程：$$\frac{x-x_0}{f'_x}=\frac{y-y_0}{f'_y}=\frac{z-z_0}{-1}$$

二、空间曲线的切线与法平面

1、设$\Gamma:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$，$\Gamma$在点$(x_0, y_0, z_0)(t = t_0)$

割线：$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}$

$\Delta t \to 0$



处的切向量为：$\{x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0)\}$，

切线方程：$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)},$$

法平面方程：$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

2、设$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，

$\begin{cases}x=x\\y=y(x)\\z=z(x)\end{cases}$ x求导 $\Rightarrow \begin{cases}F_x'+F_y'\dfrac{dy}{dx}+F_z'\dfrac{dz}{dx}=0\\ \rule{3cm}{0.4pt}=0\end{cases}$

一阶导

Γ在点(x_0,y_0,z_0)处的切向量为：$\underline{\{1,\ y'(x_0),\ z'(x_0)\}}$，其中

$y'(x_0),z'(x_0)$由方程组所确定

切线方程：$\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{y'(x_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(x_0)}$，

法平面方程：$(x-x_0)+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0$

常考题型与典型例题

V研客 在线教育

例 1(2013) 曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为.

$\| $ $F(x,y,z)$

答案：A

(A) $x-y+z=-2$.　　(B) $x+y+z=2$.

(C) $x-2y+z=-3$.　　(D) $x-y-z=0$.

分析：1° 求法向量 $\{F'_x, F'_y, F'_z\}_{(0,1,-1)}$

$=\{2x-y\sin(xy)+1,\ -x\sin(xy)+z,\ y\}_{(0,1,-1)}$

$=\{1,-1,1\}$　2° $x-(y-1)+(z+1)=0$

V研客™ 在线教育

例 2(1993) 由曲线 $\begin{cases} 3x^2+2y^2=12 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为____.

x_0 $\frac{1}{\sqrt{5}}\{0,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$.

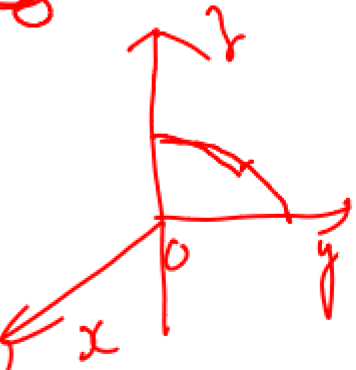
1° 旋转面方程 $3(x^2+z^2)+2y^2=12$

$F(x,y,z)=3(x^2+z^2)+2y^2-12$

2° 法向量 $\vec{n}=\{6x,4y,6z\}\Big|_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})}$

$=\{0,4\sqrt{3},6\sqrt{2}\}$

3° $\vec{n}^0=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{120}}\{\ \text{——}\ \ \text{——}\ \}$



V研客 在线教育

例 3(2003) 曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $2x + 4y - z = 0$ 平行的切平面的方程是________. $2x + 4y - z = 5$

解 设切点 (x_0, y_0, z_0)

法向量 $\vec{n} = \{2x_0, 2y_0, -1\} \parallel \{2, 4, -1\}$

下 $\frac{2x_0}{2} = \frac{2y_0}{4} = \frac{-1}{-1} \Rightarrow x_0 = 1 \quad y_0 = 2$

$z_0 = 5$

切平面 $2(x-1) + 4(y-2) - (z-5) = 0$

V研客™ 在线教育

例 4、 求曲线 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4\sin\frac{t}{2}$ 在点 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程和法平面方程.

$$\frac{x+1-\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$x + y + \sqrt{2}z - \frac{\pi}{2} - 4 = 0$$

1° $t=\frac{\pi}{2}$ 时, $x=\frac{\pi}{2}-1$, $y=1$. $z=2\sqrt{2}$

2° 切向量 $\{x'(t)\ \ y'(t)\ \ z'(t)\}_{t=\frac{\pi}{2}}$

$= \{1-\cos t, \sin t, 2\cos\frac{t}{2}\}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \{1, 1, \sqrt{2}\}$

V研客™ 在线教育

例 5、 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点(1,-2,1)处的切线和法平面方程.

$=\{1,0,-1\}$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1} \qquad x-z=0$$

1° 切向量 $\{1, y'(x), z'(x)\}_{(1,-2,1)}$

2° 两边对 x 求导

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-4\dfrac{dy}{dx}+2\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$$