2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2021年1月

数三

第七章 微分方程(差分方程)

2009-2021年微分方程(差分方程)分数分布

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
一	10	4	14-	14+	14+	4	14-	4	10	14+	14-	5
二	8	18-	14-	4	10-	14	18	14+	10+	14+	15+	17+
三	4	10+	10-	4	10-	4	10	14-	8	14+	10+	17+

注：1、小题；2、大题(与其他知识点结合：变限积分、多元函数微分学、级数)；3、应用题(主要几何应用)

微分方程(差分方程)考试内容

<table>
<tr><td></td><td>共有</td><td colspan="2">独有</td></tr>
<tr><td rowspan="3">数一二三</td><td rowspan="3">1.变量可分离微分方程、一阶线性微分方程、齐次微分方程 一阶
2.理解线性微分方程解的性质及解的结构
3.二阶常系数线性微分方程
4.某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程
5.会用微分方程解决一些简单的应用问题</td><td>数一</td><td>1.伯努利方程、全微分方程、欧拉方程
2.会用简单变量代换解某些微分方程</td></tr>
<tr><td>数一二</td><td>可降阶的微分方程
$y^{(n)} = f(x)$, $y'' = f(x, y')$, $y'' = f(y, y')$
缺y 缺x</td></tr>
<tr><td>数三</td><td>一阶常系数线性差分方程</td></tr>
</table>

数学一(13)欧拉方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 的满足条件 $y(1)=1,\ y'(1)=2$ 的解为__________.

$$y=x^2$$

数学三(14)差分方程 $\Delta y_t=t$ 的通解 $y_t=$__________.

$$y_t=C+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t$$

考题形式

- 掌握几类微分方程的求解
- 与一元、多元函数微分学及级数的结合
- 积分方程（变限积分）
- 实际问题（几何、物理、经济）

内容概述

1、微分方程——联系自变量、未知函数及其导数(或微分)之间关系、**含有未知函数的导数或微分**的方程。

例 $y' = xy$， $y'' + 2y' - 3y = e^x$， $(t^2 + x)dt + xdx = 0$，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x + y.$$

常微分方程：…；

偏微分方程：…。

$(y'')^{100} + 2(y')^{200} = e^x$

2、微分方程的阶——微分方程中出现的未知函数的导数的最高阶数.

隐式形式： $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$,

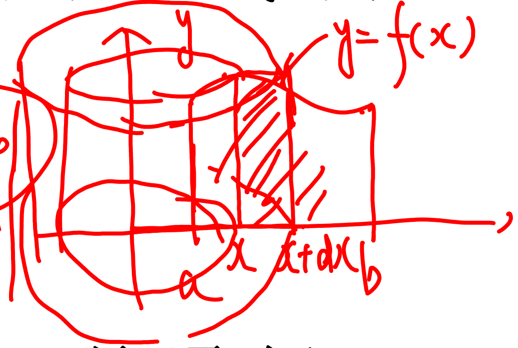
显式形式： $y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$.

3、微分方程的解——代入微分方程能使之成为恒等式的函数.

n阶微分方程常用的解的形式:

(1)特解: 确定的函数;

(2)通解: 含有n个独立的任意常数。



例 $y' = y$, e^x、$-e^x$ 是(特)解, Ce^x 是(通)解。

$y'' + y = 0$, $\sin x$、$\cos x$ 是(特)解;

$C_1 \sin x + C_2 \cos x$ 是(通)解。

$V_y = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$

特解的图象: 微分方程的积分曲线.

通解的图象: 积分曲线族.

问: 通解是全部解?

4、初始条件（用来确定任意常数的条件）：

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\quad y'\big|_{x=x_0}=y'_0,\quad \cdots,\quad y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}.$$

5、初值问题：求微分方程满足初始条件的解的问题.

一阶：$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y\big|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$ 过定点的积分曲线；

二阶：$\begin{cases} y''=f(x,y,y') \\ y\big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\big|_{x=x_0}=y'_0 \end{cases}$

过定点且在定点的切线的斜率为定值的积分曲线.

二、一阶微分方程

1、若一阶微分方程可写成变量分离的形式

$$g(y)dy = f(x)dx$$

——可分离变量的微分方程.

y' \ $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ $f(x,y)$

例 $\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 y^{\frac{4}{5}} \Rightarrow y^{-\frac{4}{5}}dy = 2x^2dx.$

解法 1、分离变量；

2、两边积分 $\int g(y)dy = \int f(x)dx$

若$G(y)$和$F(x)$分别为$g(y)$和$f(x)$的原函数，则

$$G(y) = F(x) + C$$

为微分方程的（隐式）通解。

分离变量法

例 求 $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ 的通解.

$y=0$ 是解

1° 分离 x y
2° 求通解 (可能 $\neq 0$)
3° 求特解 ($y=0$)

解 可分离变量为 $\dfrac{dy}{y} = 2xdx$, $y \neq 0$

两端积分 $\int \dfrac{dy}{y} = \int 2xdx$, 得 $\boxed{\ln|y| = x^2 + C_1,}$

通解，非全部解

即 $\boxed{|y| = e^{x^2 + C_1},}$ 即 $\boxed{y = \pm e^{C_1} e^{x^2}.}$

又 $y = 0$ 也是解

$\therefore y = Ce^{x^2}$ 为所求通解。

通解，全部解

例 1(2006-12) 微分方程 $y' = \dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 $y = Cxe^{-x}$

分析：

$y' = y\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

$\frac{1}{y}dy = \left(\frac{1}{x} - 1\right)dx$

积分

$\ln|y| = \ln|x| - x + \boxed{\ln C_1}$

$\ln y = \ln x - x + \ln C_1$

C_1

$y = C_1 x e^{-x}$

$|y| = C_1 e^{-x}|x|$

$y = \pm C_1 x e^{-x} \Rightarrow y = Cxe^{-x}$

2、齐次方程

可写成 $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$\dfrac{dy}{dx}=f(\sin(x+y))$ $x+y=u$

解法：

令 $u=\dfrac{y}{x}$，即 $y=xu$，则 $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，

代入原式 $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 化为 $u+x\dfrac{du}{dx}=f(u)$ (1)

即 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{f(u)-u}{x}$。

可分离变量

分离变量，积分，得（1）的通解

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\ln|x|+C$$

还原，得原方程的通解

$$\int\frac{du}{f(u)-u}\bigg|_{u=\frac{y}{x}}=\ln|x|+C.$$

V研客 在线教育

例 2(1993-12) 求微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 满足初始条件 $y\big|_{x=1}=1$ 的特解.

$$y=\frac{2x}{1+x^2}$$

分析

$$y'=\frac{y^2-xy}{x^2}=\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}$$

$$u=\frac{y}{x}$$

$$u+x\frac{du}{dx}=u^2-u$$

$$\int\frac{du}{u(u-2)}=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u}\right)$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|=\ln|x|+\frac{1}{2}\ln C_1$$

$$\left|\frac{u-2}{u}\right|=C_1x^2$$

$$\frac{u-2}{u}=\pm C_1x^2$$

C

$$\frac{u-2}{u}=Cx^2$$

$$\frac{y-2x}{y}=Cx^2$$

$y\big|_{x=1}=1$ $C=-1$

3、一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x).$$

通解（公式）：

其中一个原函数

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

$$=Ce^{-\int P(x)dx}$$ 对应齐次方程通解

$$+e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

非齐次方程特解

V研客 在线教育 www.vyanke.com

例 3(2008-24) 微分方程 $(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$ 的通解是________ $y=x(C-e^{-x})$.

$-\int$

$p(x)=-\frac{1}{x}$

$q(x)=xe^{-x}$

分析

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+x^2e^{-x}}{x}=\frac{1}{x}y+xe^{-x}$$

$$y'-\frac{1}{x}y=xe^{-x}$$

$$y=e^{-\int-\frac{1}{x}dx}\left(C+\int xe^{-x}e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx\right)$$

$$=x\left(C+\int xe^{-x}\cdot\frac{1}{x}dx\right)=x(C-e^{-x})$$

$-p(y)$

例、方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x+y^3}$ 的通解是____________.

$\dfrac{dx}{dy}+p(y)x=q(y)$

$x'\left(-\dfrac{1}{y}\right)x=y^2$

【解】方程变为如下形式 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x+y^3}{y}=\dfrac{x}{y}+y^2$，为一阶线性微分方程

所以原方程通解为 $x=e^{-\int -\frac{1}{y}dy}\left(C+\int y^2 e^{\int -\frac{1}{y}dy}dy\right)=\dfrac{y^3}{2}+Cy$

$=y\left(C+\int y^2\cdot\dfrac{1}{y}dy\right)$

$x=e^{-\int p(y)dy}\left(C+\int q(y)e^{\int p(y)dy}dy\right)$

4、伯努利(Bernoulli)方程(数学一)

标准形式 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{n}$ $(n\neq 0,1)$

解法： 经过因变量代换化为线性微分方程.

两端除以 y^n，成为 $\frac{1}{1-n}dy^{1-n}$ $y^{-n}\dfrac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$,

令 $z=y^{1-n}$， 则 $\dfrac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$, 一阶线性

原方程化为 $\dfrac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$,

解此一阶线性微分方程 ；

还原，即得 Bernoulli 方程的通解。

例 求 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{4}{x}y=x^2\sqrt{y}$ 的通解.

$2d\sqrt{y}$

解 两端除以 $\sqrt{y}$，得 $\dfrac{1}{\sqrt{y}}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{4}{x}\sqrt{y}=x^2,$

令 $z=\sqrt{y},$ 由 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\dfrac{dy}{dx},$

原方程化为 $\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{2}{x}z=\dfrac{x^2}{2}$

解得 $z=x^2\left(\dfrac{x}{2}+C\right),$

还原，得原方程的通解 $y=x^4\left(\dfrac{x}{2}+C\right)^2.$

5、全微分方程(数学一)

若 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 有原函数，$du(x,y)$

则称 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 为 全微分方程。

例如 $ydx+xdy=0$，　$\because d(xy)=ydx+xdy$，

所以是全微分方程。

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 是全微分方程

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

全微分方程的判定方法

例如 $ydx-xdy=0$，　$\because \dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，

所以不是全微分方程。

解法：

若 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 是全微分方程，

则 $\exists\, u(x,y)$，使 $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，

则原方程可表为 $du(x,y)=0 \iff u(x,y)=C$.

隐式通解

原函数 $u(x,y)$ 的求法：

1、曲线积分法：

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

2、全微分的运算。

3、偏积分法：

例　求解 $(x^2 + x^3 + y)dx + (1 + x)dy = 0.$

用全微分运算: (凑)　　Q　　$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$

$$(x^2 + x^3 + y)dx + (1 + x)dy$$

$$= x^2 dx + x^3 dx + (ydx + xdy) + dy$$

$$= d(\frac{x^3}{3}) + d(\frac{x^4}{4}) + d(xy) + dy$$

$$= d(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + xy + y)$$

$\therefore$ 通解为 $$\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + xy + y = C.$$

例 求解 $(x^2+x^3+y)dx+(1+x)dy=0.$

用偏积分法: 设 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=Q \quad$ 求 $u \quad =du$

$$\because \frac{\partial u}{\partial x}=x^2+x^3+y,$$

$$\therefore u=\int(x^2+x^3+y)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+xy+\boxed{C(y)},$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial y}=x+C'(y), \qquad \text{又} \ \frac{\partial u}{\partial y}=1+x,$$

$$\therefore \cancel{x}+C'(y)=1+\cancel{x},$$

$$\therefore C(y)=y+c,$$

$$\therefore \text{原方程的通解为} \ \frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+xy+y=C.$$

三、可降阶的微分方程(数学一、二)

1、$y^{(n)}=f(x)$ 型 (数三)

$$\boxed{\begin{aligned} &y''=f(x,y') \text{ — 缺 } y \\ &y''=f(y,y') \text{ — 缺 } x \end{aligned}}$$

令 $p=y'$

特点： 不显含 y 及 $y',\cdots,y^{(n-1)}$.

解法： 连续积分n次。

$$\because\ y^{(n)}=(y^{(n-1)})'=f(x)$$

$$\therefore\ y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1$$

$$\therefore\ y^{(n-2)}=\int\left(\int f(x)dx+C_1\right)dx+C_2$$

$$,\cdots,$$

$$\therefore\ y=\int(\cdots(\int(\int f(x)dx+C_1)dx+C_2)dx\cdots)dx+C_n$$

V研客™ 在线教育 www.vyanke.com

2、 $y''=f(x,y')$ 型

特点： 不显含因变量 y.

解法： 因变量换元: $p=y'$，降阶为$p'=f(x,p)$。

若得解 $p=\varphi(x;C_1)$, 则 $y'=\varphi(x;C_1)$,

则 $y(x;C_1,C_2)=\int\varphi(x;C_1)dx+C_2$

例 4(2000-1) 微分方程 $xy'' + 3y' = 0$ 的通解为.

______________ $y = C_2 x^{-2} + C_1$

3、 $y''=f(y,y')$ 型

特点： 不显含自变量 x.

解法： 做因变量及自变量换元;

新因变量 $p=\dfrac{dy}{dx}$, 新自变量 y,

则 $y''=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$,

原方程降阶为 $p\dfrac{dp}{dy}=f(y,p)$

若得其解为 $p=\varphi(y;\ C_1)$, 则 $\dfrac{dy}{dx}=\varphi(y;\ C_1)$,

原方程通解为 $\displaystyle\int\frac{dy}{\varphi(y;\ C_1)}=x+C_2$.

例 5(2002-12) 微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解 $\underline{\quad y=\sqrt{x+1}\quad}$

四、高阶线性微分方程

1、n阶非齐次线性微分方程的标准形式

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x) \qquad (1)$$

n阶齐次线性微分方程的标准形式

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \qquad (2)$$

注：n阶线性微分方程解的性质和结构

解的性质与结构

(1)如果y_1与y_2是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$的任意两个解，

则 $y=c_1y_1+c_2y_2$(c_1、c_2为任意常数)仍是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$的解.

(2)如果y_1与y_2是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的两个特解，

则y_1-y_2为 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$的解.

(3)如果y_1与y_2分别是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$及 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的解，

则y_1+y_2为 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的解.

(4)如果y_1与y_2分别是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$及 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$的解，

则y_1+y_2为 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$的解.

(5)如果$\tilde{y}$是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的一个特解，而y^*

是对应的齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$的通解.则$y=\tilde{y}+y^*$

是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的通解.

2、二阶常系数齐次线性方程

$$y'' + py' + qy = 0$$

$$r^2 + pr + q = 0$$

特征根的情况	通解的表达式
实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_2 x}$
复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

V研客™ 在线教育 www.vyanke.com

例 6(2013-3) 微分方程 $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ 的通解为

$y =$ ______________ $(C_1 + C_2 x)e^{\frac{1}{2}x}$

例 7(1996-3) 微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解为 $y=$______________ $e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

例 8(2010-2) 3 阶常系数线性齐次微分方程 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为 $y =$ ________

$$C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

3、常系数非齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=f(x)$$

通解=对应齐次线性微分方程的通解

+该非齐次线性微分方程的特解

由非齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=f(x)$$

的结构特点$\Rightarrow$

$f(x)=e^{\lambda x}[P_{m_1}(x)\cos\omega x+P_{m_2}(x)\sin\omega x]$ 时，

可用代数方法（待定系数法）求得一个特解y^*。

(特殊情况：$P_m(x), P_m(x)e^{\lambda x}, P_m(x)\cos\omega x,$

$$P_m(x)\sin\omega x,\cdots)$$

V研客™ 在线教育 www.vyanke.com

(1) $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

可设 $y^*(x)=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$

待定

（k是λ作为特征根的重数）

$$k=\begin{cases}0 & \lambda\text{不是根}\\ 1 & \lambda\text{是单根}\\ 2 & \lambda\text{是重根}\end{cases},$$

$(2) f(x)=e^{\lambda x}[P_{m_1}(x)\cos\omega x+P_{m_2}(x)\sin\omega x]$ 型

可设 $y^*(x)=x^k e^{\lambda x}(R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x)$

待定

（$m=\max\{m_1,m_2\}$，

k是$\lambda+i\omega$作为特征根的重数）

$$k=\begin{cases}0, \lambda+i\omega\text{不是根;}\\ 1, \lambda+i\omega\text{是单根.}\end{cases}$$

例 9(1995-3)微分方程 $y''+y=-2x$ 的通解为 $y=$

$$-2x+C_1\cos x+C_2\sin x$$

V研客™ 在线教育 www.vyanke.com

例 10(2007-12) 二阶常系数非齐次微分方程 $y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为______________

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}-2e^{2x}$$

4、欧拉方程(数学一)

形式：$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$.

解法：令 $x = e^t$，有 $xy' = \dfrac{dy}{dt}$，$x^2 y'' = \dfrac{d^2 y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}$，…，

特别地，二阶欧拉方程 $x^2 y'' + pxy' + qy = f(x)$

可化为二阶常系数线性方程

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (p-1)\frac{dy}{dt} + qy = f(e^t).$$

V研客 在线教育 www.vyanke.com

例 11(2004-1) 欧拉方程

$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+4x\dfrac{dy}{dx}+2y=0\ (x>0)$ 的通解为______

$$y=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}$$

2021-1 欧拉方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 的满足条件 $y(1)=1,\ y'(1)=2$ 的解为 $\underline{\quad y=x^2 \quad}$.

5、差分方程(数学三)

(1) 差分的概念

y_t 的一阶差分定义为 $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$，

一阶差分 Δy_t 的差分称为 y_t 的二阶差分，记为 $\Delta^2 y_t$，

即 $$\Delta^2 y_t = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$$

(2)一阶常系数线性差分方程

形如 $y_{t+1} - py_t = f(t)$ （t=0,1,2,…）的方程，称为一阶常系数线性差分方程，其中 p 为非零常数，$f(t)$为已知函数.

$y_{t+1} - py_t = 0$ 称为它对应的常系数一阶线性齐次差分方程.

一阶常系数线性差分方程的通解为：

$y_t = cp^t + y_t^*$,其中 $y^*{}_t$ 为特解.

若 $f(t)=(A_0t^n+A_1t^{n-1}+\cdots+A_n)b^t$,则待定特解 $y^*{}_t$ 具有下列形式：

$$y_t^* = t^s(B_0t^n + B_1t^{n-1} + \ldots + B_n)b^t,$$

其中，当 $p\neq b$ 时，$s=0$；当 $p=b$ 时，$s=1$.

V研客™ 在线教育 www.vyanke.com

例 12(1997-3)差分方程 $y_{t+1}-y_t=t\cdot 2^t$ 的通解为________.

【解】对应的齐次差分方程为 y_{t+1}-y_t=0，则其通解为 $\tilde{y}_t=c\times 1^t=c$，

设原差分方程的特解为 $y_t^*=2^t(At+B)$，

代入到原差分方程中，得

$$2^{t+1}[A(t+1)+B]-2^t(At+B)=t\cdot 2^t,$$

即 $At+2A+B=t$.比较系数知 $A=1$，$B=-2$，故 $y_t^*=2^t(t-2)$.

原差分方程的通解为 $y_t=\tilde{y}_t+y_t^*=c+2^t(t-2)$.

例 13(1998-3) 差分方程 $2y_{t+1}+10y_t-5t=0$ 的通解为____.

$$y_t=C(-5)^t+\frac{5}{12}(t-\frac{1}{6})$$

例 14(2001-3) 某公司每年的工资总额在比上一年增加 20% 的基础上再追加 2 百万元.若以 W_t 表示第 t 年的工资总额(单位:百万元)，则 W_t 满足的差分方程是____.

$$W_t = 1.2W_{t-1} + 2$$

例 15(2017-3) 差分方程 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解为 $y_t=$____.

$$C2^t+t2^{t-1}$$

(2021-3)差分方程 $\Delta y_t = t$ 的通解 $y_t =$ ____________.

$$y_t = C + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t$$

常考题型与典型例题

一、方程求解

例 16(2014-1) 微分方程 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 满足条件 $y(1) = e^3$ 的解为 $y =$ ____.

$y = xe^{2x+1}(x > 0)$

例 17(2012-2) 微分方程 $y\,\mathrm{d}x+(x-3y^2)\,\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$____.

$$y=\sqrt{x}$$

例 18(2017-1) 微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为___.

$$y=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$$

例 19(2017-2) 微分方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为 $y^{*}=$

(A) $Ae^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

(B) $Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

(C) $Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

(D) $Axe^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

答案：C

V研客™ 在线教育 www.vyanke.com

例 20(2015-23) 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3，则 $y(x)=$ __________.

$$y(x)=2e^{x}+e^{-2x}$$

例 21(2015-1) 设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-\frac{1}{3})e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解，则

(A) $a=-3,b=2,c=-1$.　(B) $a=3,b=2,c=-1$.

(C) $a=-3,b=2,c=1$.　(D) $a=3,b=2,c=1$.

答案：A

例 22(2009-1) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$，则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2$，$y'(0)=0$ 的解为 $y=$ ________.

$$y=-xe^x+x+2$$

例 23(2013-12) 已知

$y_1=e^{3x}-xe^{2x}, y_2=e^x-xe^{2x}, y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的三个解，则该方程的通解为 $y=$ __________.

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^x-xe^{2x}$$

二、综合题

例 24(1994-3) 设 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''-y'-e^{\sin x}=0$ 的解，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 $y=xe^{2x+1}(x>0)$

(A) x_0 的某个邻域内单调增加；

(B) x_0 的某个邻域内单调减少；

(C) x_0 处取得极小值；(D) x_0 处取得极大值.

答案：C

例 25(2002-2) 设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

(A) 不存在；(B)等于 1；(C)等于 2；(D) 等于 3.

答案：C

例 26(2018-3) 函数 $f(x)$ 满足

$$f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0),$$

且 $f(0)=2$，则 $f(0)=$ ________________ .

例 27(1995-4) 已知连续函数 $f(x)$ 满足条件

$$f(x)=\int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right)dt+e^{2x},$$ 求 $f(x)$.

$$f(x)=3e^{3x}-2e^{2x}$$

例 28(2016-3) 设函数 $f(x)$ 连续，且满足

$$\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x (x-t)f(t)dt+e^{-x}-1，$$ 求 $f(x)$.

$$f(x)=-\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

三、应用题

例 29(2015-13) 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0 \in I$，曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0) = 2$，求 $f(x)$ 的表达式.

$$f(x) = \frac{8}{4-x}.$$

例 30(2006-3) 在 xOy 坐标平面上，连续曲线 L 过点 $M(1,0)$，其上任意点 $P(x,y)(x \neq 0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax（常数 $a>0$）.

$$y = ax^2 - ax, a = 2.$$

（I）求 L 的方程；

（II）当 L 与直线 $y = ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时，确定 a 的值.

例 31(2009-2) 设非负函数 $y=y(x)\quad(x\geq 0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$，当曲线 $y=y(x)$ 过原点时，其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域 D 的面积为 2，求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

$$\frac{17\pi}{6}.$$