

# 2022年研究生入学考试

## 高等数学(微积分)基础班习题课

2021年2月

关注微信公众号：【大开研界】  
客服微信号：kaoyan4884  
考研人的家园

# 第六部分 二重积分

关注微信公众号：【大开研界】 考研人的家园  
客服微信号：kaoyan4884

106、设  $a > 0$ , 交换积分次序  $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{ay}} f(x, y) dx + \int_a^{2a} dy \int_0^{2a-y} f(x, y) dx =$

$$\int_0^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} f(x, y) dy$$

关注微信公众号：【大开研界】 考研人的家园  
客服微信号：kaoyan4884

107、交换积分次序  $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy =$

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx$$

关注微信公众号：【大开研界】 考研人的家园  
客服微信号：kaoyan4884



关注微信公众号：【大开研界】 考研人的家园

# 108、将直角坐标系下的累次积分转换成极坐标下的累次积分并计算

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} e^{-y^2} dy \int_0^y e^{-x^2} dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}R}^R e^{-y^2} dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} e^{-x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{8} (1 - e^{-R^2})$$

关注微信公众号：【大开研界】 考研人的家园  
服务微信号：kaoyan4884

109、交换积分次序  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr =$

$$\int_0^{\sqrt{2}} dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{r}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\theta + \int_{\sqrt{2}}^2 dr \int_{-\arccos\frac{r}{2}}^{\arccos\frac{r}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\theta$$

110、计算  $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy = 2 - \frac{\pi}{2}$

关注微信公众号：【大开研界】 考研人的家园  
客服微信号：kaoyan4884

111、计算  $\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dy = \frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$

关注微信公众号：【大开研界】 考研人的家园  
客服微信号：kaoyan4884

112、计算  $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} \cos^2 x dx = \frac{2}{3}$

关注微信公众号：【大开研界】 考研人的家园  
客服微信号：kaoyan4884

113、计算  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + 2y)d\sigma = \frac{\pi}{4}$

关注微信公众号：【大开研界】 考研人的家园  
客服微信号：kaoyan4884

114、设D为圆域 $x^2 + y^2 \leq 2x + 2y$ , 则 $\iint_D xy dx dy = 2\pi$

关注微信公众号：【大开研界】 考研人的家园  
客服微信号：kaoyan4884

115、 设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , 则 $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2\ln(1 + \sqrt{2})$

关注微信公众号：【大开研界】 考研人的家园  
客服微信号：kaoyan4884

116、 设 $D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ , 则 $\iint_D \sqrt{|y - x^2|} dx dy = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}$

关注微信公众号：【大开研界】 考研人的家园  
客服微信号：kaoyan4884

117、设 $f(x, y)$ 为连续函数， $F(x) = \int_1^x dv \int_v^x f(u) du (x > 1)$ ，则 $F'(x) = (x-1)f(x)$

关注微信公众号：【大开研界】 考研人的家园  
客服微信号：kaoyan4884

118、设 $f(x, y)$ 为连续函数，且 $f(x, y) = \frac{1}{\pi} \sqrt{x^2 + y^2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) d\sigma + y^2$ ,

则 $f(x, y) = \frac{3}{4} \sqrt{x^2 + y^2} + y^2$

关注微信公众号：【大开研界】 考研人的家园  
客服微信号：kaoyan4884

119、设区域 $D=\{(x, y)|1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}$ ，则 $\iint_D x^2 \ln(x^2 + y^2) d\sigma = \frac{\pi}{8}(3e^4 + 1)$

关注微信公众号：【大开研界】 考研人的家园  
客服微信号：kaoyan4884

120、设积分区域 $D$ 由曲线 $y = \ln x$ 以及直线 $x = 2, y = 0$ 围成，则
$$\iint_D \frac{e^{xy}}{x^x - 1} d\sigma = \ln 2$$

关注微信公众号：【大开研界】 考研人的家园  
客服微信号：kaoyan4884

设 $D$ 是 $xoy$ 平面上以 $(1,1)$ ,  $(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域,

256、

$D_1$ 是 $D$ 在第一象限部分, 则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) d\sigma$ 等于

答案: A

(A)  $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y d\sigma \cdot$

(B)  $2 \iint_{D_1} xy d\sigma \cdot$

(C)  $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) d\sigma \cdot$

(D) 0.

关注微信公众号：【大开研界】  
客服微信号：kaoyan4884

257、累次积分  $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx$  可写成，

答案：C

(A)  $\int_0^2 dx \int_x^{2-x} f(x, y) dy \cdot$       (B)  $\int_0^2 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx \cdot$

(C)  $\int_0^1 dx \int_x^{2-x} f(x, y) dy \cdot$       (D)  $\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx \cdot$

258、极坐标下累次积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}}^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$  可写成，

答案：B

- (A)  $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \cdot$       (B)  $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy \cdot$
- (C)  $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \cdot$       (D)  $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy \cdot$

259、累次积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$  可写成，

(A)  $\int_0^2 dx \int_0^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \cdot$

(B)  $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy \cdot$

答案：C

(C)  $\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx \cdot$

(D)  $\int_0^2 dx \int_0^2 f(x, y) dy \cdot$

260、累次积分  $I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}} dy =$

答案：B

- (A)  $\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$  · (B)  $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$  · (C)  $\frac{1}{4}(\sqrt{2}+1)$  · (D)  $\frac{1}{3}(\sqrt{2}+1)$  ·

261、设区域 $D$ 由 $y = x$ ,  $y = x + 1$ ,  $y = 1$ ,  $y = 3$ 围成, 则 $\iint_D y d\sigma =$

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 6.

答案: C

关注微信公众号：【大开研界】 考研人的家园  
客服微信号：kaoyan4884

262、 设区域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x + 2y\}$ ， 则  $\iint_D (x^2 + xy + y^2) d\sigma =$

答案： B

(A)  $6\pi$  .

(B)  $8\pi$  .

(C)  $10\pi$  .

(D)  $12\pi$  .

关注微信公众号：【大开研界】 考研人的家园  
客服微信号：kaoyan4884

设区域  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , 则  $\iint_D \frac{d\sigma}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} =$

(A)  $\frac{\pi}{2}$ .

(B)  $\frac{\pi}{3}$ .

(C)  $\frac{\pi}{4}$ .

(D)  $\frac{\pi}{6}$ .

**答案：D**

264、 设区域  $D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, x^2 + y^2 \leq x\}$ , 则  $\iint_D |xy| d\sigma =$

(A)  $\frac{5}{6}$ .

(B)  $\frac{11}{12}$ .

(C)  $\frac{3}{4}$ .

(D)  $\frac{7}{8}$ .

答案：B

265、 设区域  $D$  由  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 1$ , 及  $y$  轴所围成, 则  $\iint_D \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{x}} d\sigma =$  **答案: C**

(A)  $1 + \frac{2}{e}$ .

(B)  $1 - \frac{2}{e}$ .

(C)  $1 - \frac{1}{e}$ .

(D)  $1 + \frac{1}{e}$ .

266、 设区域  $D$  由  $y = x$  及  $y^2 = x$  围成， 则  $\iint_D \frac{\sin xy}{y} d\sigma =$

- (A)  $\pi$  .      (B)  $-\pi$  .      (C)  $\frac{1}{\pi}$  .      (D)  $-\frac{1}{\pi}$  .

答案： C

267、 设区域  $D = \{(x, y) | \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \leq 1\}$ , 则  $\iint_D (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}) dx dy =$

- (A)  $\frac{4}{15}$ .      (B)  $\frac{2}{3}$ .      (C)  $\frac{8}{15}$ .      (D)  $\frac{4}{5}$ .

答案：C

268、

答案：B

设  $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \leq \sqrt{3}y, y \leq \sqrt{3}x\}$ , 则  $\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma =$

(A)  $\frac{\pi}{6}$ .

(B)  $\frac{\pi^2}{6}$ .

(C)  $\frac{\pi}{3}$ .

(D)  $\frac{\pi^2}{3}$ .

关注微信公众号：【大开研界】  
客服微信号：kaoyan4884

269、累次积分  $I = \int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{x^2 + y^2} dx =$

答案：C

(A)  $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} \ln(\sqrt{2} + 1)$  · (B)  $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} \ln(\sqrt{2} - 1)$  ·

(C)  $\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{6} \ln(\sqrt{2} + 1)$  · (D)  $\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{6} \ln(\sqrt{2} - 1)$  ·

270、 设  $I_1 = \iint_D \frac{x+y}{4} dx dy$ ,  $I_2 = \iint_D \sqrt{\frac{x+y}{4}} dx dy$ ,  $I_3 = \iint_D \sqrt[3]{\frac{x+y}{4}} dx dy$ ,

其中  $D$  是由不等式  $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 9$  所确定, 则

**答案： B**

- (A)  $I_2 < I_3 < I_1$ .      (B)  $I_1 < I_2 < I_3$ .  
 (C)  $I_3 < I_1 < I_2$ .      (D)  $I_3 < I_2 < I_1$ .

271、

设平面区域 $D$ 由 $x+y=\frac{1}{2}$ ,  $x+y=1$ 及两个坐标轴围成, **答案: C**

$$I_1 = \iint_D \ln(x+y)^3 dx dy, I_2 = \iint_D (x+y)^3 dx dy, I_3 = \iint_D \sin(x+y)^3 dx dy, \text{ 则}$$

(A)  $I_1 < I_2 < I_3$ .      (B)  $I_3 < I_1 < I_2$ .

(C)  $I_1 < I_3 < I_2$ .      (D)  $I_3 < I_2 < I_1$ .

## 272、设积分区域

答案：D

$$D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad D_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\},$$

$$D_3 = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{2}x^2 + y^2 \leq 1 \right\}, \quad D_4 = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{1}{2}y^2 \leq 1 \right\},$$

$$\text{记 } I_i = \iint_D \left[ 1 - \left( x^2 + \frac{1}{2}y^2 \right) \right] d\sigma \quad (i = 1, 2, 3, 4), \text{ 则 } \max \{ I_1, I_2, I_3, I_4 \} =$$

- (A)  $I_1$ .      (B)  $I_2$ .      (C)  $I_3$ .      (D)  $I_4$ .

设 $g(x)$ 有连续的导数,  $g(0)=0, g'(0)=a \neq 0, f(x, y)$ 在点

273、

$\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(x, y) dx dy$  答案: C

$(0, 0)$ 的某邻域内连续, 则  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(x, y) dx dy}{g(r^2)} =$

- (A)  $\frac{f(0, 0)}{a}$ . (B)  $\frac{f(0, 0)}{2a}$ . (C)  $\frac{\pi f(0, 0)}{a}$ . (D)  $\frac{\pi f(0, 0)}{2a}$ .

关注微信公众号：【大开研界】  
客服微信号：kaoyan4884

274、

设 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = xy + \iint_D f(u, v) du dv$ , 其中

$D$ 是由 $y = 0, y = x, x = 1$ 所围区域, 则 $f(x, y) =$  **答案: C**

- (A)  $xy$  .      (B)  $2xy$  .      (C)  $xy + \frac{1}{8}$  .      (D)  $xy + 1$  .

设 $g(x)$ 是可微函数 $y=f(x)$ 的反函数, 且 $f(1)=0$ ,

275、

$$\int_0^1 xf(x)dx = 1011, \text{ 则 } \int_0^1 dx \int_0^{f(x)} g(t)dt =$$

答案：C

- (A) 0 .      (B) 2021 .      (C) 2022 .      (D) 2100 .